ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen Final 10/12/2024

UTN.BA UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

APELLIDO DEL ALUMNO: .... NOMBRE: ....

CORRIGIÓ: .... REVISÓ: ....

T1	T2	P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN

***Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta*.**
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).

T1- Indique, justificando, si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

a) " $x = 0$ es solución singular de la ecuación diferencial $x\,y' = 4\,x^2$ "

b) " $z = f(x, y)$ definida por $z\,x + \ln(z + y) = 0$ verifica la siguiente ecuación diferencial $z'_x = z\,(y+z)\,z'_y$ "

T2- a) **Defina** campo de gradiente**. Demuestre** la propiedad de la independencia de la trayectoria en las integrales de línea-

b) Sea f una función derivable con continuidad en R y sea **C** una curva plana cerrada, suave y orientada positivamente, entonces **compruebe** que $\oint_C \left(x\ f(x^2+y^2)\,\vec{\mathbf{i}} + y\ f(x^2+y^2)\,\vec{\mathbf{j}}\right) \cdot d\vec{r}$ es nula y **justique** .

P1- **Exprese** (mediante una integral múltiple definiendo sus límites y el integrando) el flujo saliente de $\bar{f}$: $\boldsymbol{R^3} \to \boldsymbol{R^3}$ siendo $\bar{f} \in$ **C**^{1}en $\boldsymbol{R^3}$ a través de la superficie frontera de cuerpo **H,**

H $= \{(x,y,z) \in R^3 \wedge 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2} \wedge x^2 + y^2 \le 4 \wedge x^2 + y^2 - 2y \ge 0 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0\}$

Sabiendo que : $\boldsymbol{D}\bar{f}\,(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & y & 1 \\ -2y & -2\,x & 0 \end{bmatrix}$ para todo $(x,y,z) \in R^3$

P2 **-** Sea f: $R^2 \to R$ / f $\in C^3$. Si el polinomio de Taylor de grado 2 asociado a la función f en un disco de centro en punto $(1;1)$ es $P(x;y) = 2 - x - 3y + 3x^2 + \frac{1}{2}y^2$.
Encuentre los valores reales de **a** y **b** de la función $g(x;y) = f(x;y) - 3\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y$ para que el plano tangente a la gráfica de g(x , y) en el punto A= (1,1, g(1,1)) sea : 20 x – 10 y + 2z = D

P3 **- Calcule** el valor del trabajo de $\bar{f} \in C^1$a lo largo de la curva C de ecuaciones:
$x + z = 3 \wedge x^2 + y^2 = 1$, sabiendo que rot($\bar{f}$) = (z , y , x) , indique el sentido que ha elegido para recorrer la curva C.

P4- **Plantee** el área de la porción de la superficie $z = y^3$ siendo $4 - x^2 \ge y \wedge y \ge y_p$, en el primer octante, hallando previamente y_p solución particular de $y'' - y = -3x$ / con $y(0) = 0 \wedge y'(0) = 3$.

AM II	Final	1 / 3
	UTN BA	10-12-24

1) V o F

a) "$x=0$ es solución singular de la ec diferencial $xy'=4x^2$"

$xy' = 4x^2 \longrightarrow x=0$ es solución

$\quad\quad\quad\;\; \longrightarrow$ si $x \neq 0 \longrightarrow xy' = 4x^2 \rightarrow y' = 4x \rightarrow \boxed{y = 2x^2 + c}$

$x=0$ es solución pero no surge de $\rightarrow$

es solución singular

V

b) $z = f(x,y)$ definida por $zx + \ln(z+y) = 0$ verifica la sig. ec. diferencial:

$$z'_x = z(y+z)z'_y$$

x TFI: $G(x,y,z) = zx + \ln(z+y)$

$G'_x = z \qquad G'_y = \frac{1}{z+y} \qquad G'_z = x + \frac{1}{z+y} = \frac{x(z+y)+1}{z+y}$

$$z'_x = -\frac{G'_x}{G'_z} = \frac{-z}{\frac{x(y+z)+1}{z+y}} \rightarrow \boxed{z'_x = \frac{-z(y+z)}{x(y+z)+1}}$$

$$z'_y = -\frac{G'_y}{G'_z} = \frac{\frac{1}{y+z}}{\frac{x(y+z)+1}{y+z}} = \frac{1}{\cancel{y+z}} \cdot \frac{\cancel{y+z}}{x(y+z)+1} \rightarrow \boxed{z'_y = \frac{1}{x(y+z)+1}}$$

$\therefore$

$$z'_x = z(y+z)z'_y$$

$$\frac{-\cancel{z(y+z)}}{x(y+z)+1} = \cancel{z(y+z)} \cdot \left(\frac{-1}{x(y+z)+1}\right)$$

$$\boxed{\frac{-1}{x(y+z)+1} = \frac{-1}{x(y+z)+1}} \checkmark$$

V

$\boxed{T2}$ a) Definir campo de gradiente. Demostrar la propiedad de la independencia de la trayectoria en las integrales de línea

Campo de gradientes ≡ campo conservativo

$\bar{f}: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\bar{f} \in C^1(D)$, $dom(\bar{f})$ = conj. abierto

y $D\bar{f}$ (matriz jacobiana) simétrica $\Rightarrow \bar{f}$ es campo de gradiente

si $\bar{f}$ es campo de gradiente $\Rightarrow \exists\, \varphi$ (función potencial) tal que $\bar{f} = \nabla\varphi$

integrando m.a m.

$$C: \bar{A} \to \bar{B} \quad \int_C \bar{f}\, d\bar{l} = \int_A^B \nabla\varphi = \varphi \Big|_A^B = \varphi_{(B)} - \varphi_{(A)}$$

solo importa punto inicial $(\bar{A})$ y punto final $(\bar{B})$

$\int_C \bar{f}\, d\bar{l}$ es independiente del camino

b) Sea f una función derivable con continuidad en $\mathbb{R}$ y sea C una curva plana cerrada, suave y orientada positivamente, entonces comprobar que:

$$\oint_C \big(\underbrace{x\, f(x^2+y^2)\, \check{i}}_{P} + \underbrace{y\, f(x^2+y^2)\, \check{j}}_{Q}\big)\, d\vec{r}$$

es nula. Justificar

$$\bar{f}_{(x,y)} = \big(\overbrace{x\, f(x^2+y^2)}^{P}, \overbrace{y\, f(x^2+y^2)}^{Q}\big)$$

f es derivable y continua, entonces uso Regla de la cadena:

$$\left.\begin{array}{l} P'_y = x\, f'(x^2+y^2) \cdot 2y \\ Q'_x = y\, f'(x^2+y^2)\, 2x \end{array}\right\} = \checkmark \to \underbrace{\text{matriz jacobiana simétrica}}_{\exists\, \varphi \,/\, \bar{f} = \nabla\varphi}$$

$$\oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{l} = \int_A^B \nabla\varphi = \underbrace{\varphi_{(B)} - \varphi_{(A)}}_{} = 0$$

B = A pues es curva cerrada

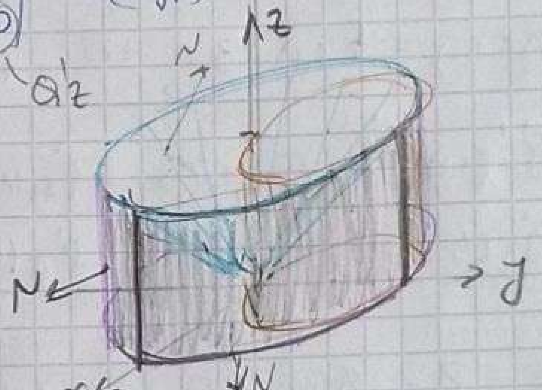
AM II	Final	2/3
	UTN BA	10-12-24

(P1) Expresar (mediante una integral múltiple definiendo sus límites y el integrando) el flujo saliente de $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ siendo $\bar{F} \in C^1$ en $\mathbb{R}^3$ a través de la sup. frontera del cuerpo H.

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2} \wedge x^2+y^2 \leq 4 \wedge x^2+y^2-2y \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$$

Sabiendo que
$$Df(x) = \begin{array}{c} P'_x \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & y & 1 \\ -2y & -2x & 0 \end{pmatrix} \\ P'_y \quad Q'_z \end{array} \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2 \leq 4 \\ x^2+y^2-2y \geq 0 \rightarrow x^2+(y-1)^2 \geq 1 \\ x \geq 0 \quad , y \geq 0 \end{cases}$$

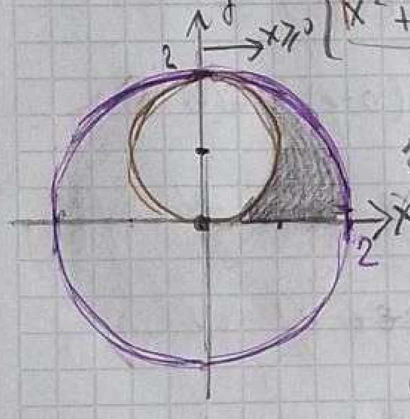


Proyección: $\boxed{x^2+y^2 \leq 4} \longrightarrow r^2 \leq 4$ $\boxed{r \leq 2}$

$x \geq 0$ $\boxed{x^2+(y-1)^2 \geq 1} \longrightarrow \underbrace{x^2+y^2}_{r^2} \geq 2y$

$r^2 \geq 2\cancel{r}\,\text{sen}(t)$

$\boxed{r \geq 2\,\text{sen}(t)}$



$y \geq 0$ $\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \\ z = z \end{cases}$

$\boxed{2\,\text{sen}(t) \leq r \leq 2}$

$\boxed{0 \leq t \leq \pi/2}$

$0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}$ $\sqrt{r^2}$) $r \rightarrow \boxed{0 \leq z \leq r}$

flujo saliente ✓
$F \in C^1$ ✓
S sup. frontera región de $\mathbb{R}^3$ } se cumplen las hip. T. Gauss $\Rightarrow \oiint_S \bar{F}\,d\bar{s} = \iiint_H \operatorname{div}\bar{F}\,d\text{vol}$

$\operatorname{div}(\bar{F}) = P'_x + Q'_y + R'_z = 0 + y + 0 = y$

$$\boxed{\oiint_S \bar{F}\,d\bar{s} = \iiint_H y\,dx\,dy\,dz \overset{C.V.}{=} \int_0^{\pi/2}\int_{2\,\text{sen}(t)}^{2}\int_0^{r} \overset{Jac}{r}\,\underbrace{r\,\text{sen}(t)}_{y}\,dz\,dr\,dt}$$

otra forma, $$\oiint_S \bar{F}\,d\bar{s} = \int_0^2 \int_{\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} y\,dz\,dx\,dy$$

P2) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f \in C^3$. Si el polinomio de Taylor de grado 2 asociado a la función f en un disco de centro en punto $(1,1)$ es

$P_{(x,y)} = 2 - x - 3y + 3x^2 + \frac{1}{2}y^2$

Encontrar los valores reales a y b de la función $g(x,y) = f(x,y) - 3ax + by$ para que el plano tangente a la gráfica de $g(x,y)$ en el punto $A = (1,1,g(1,1))$ sea $20x - 10y + 2z = D$

x Taylor: $f_{(1,1)} = P_{(1,1)}$, $f'_x(1,1) = P'_x(1,1)$, $f'_y(1,1) = P'_y(1,1)$

Hallo plano tg a la gráfica de g en $(1,1,g(1,1))$

$g(1,1) = f(1,1) - 3a + b = P(1,1) - 3a + b = \boxed{\frac{3}{2} - 3a + b = g_{(1,1)}}$

$g'_x(1,1) = f'_x(1,1) - 3a = P'_x(1,1) - 3a = -1 + \overset{6}{6x}\big|_{(1,1)} - 3a = \boxed{5 - 3a = g'_x}$

$g'_y(1,1) = f'_y(1,1) + b = P'_y(1,1) + b = -3 + y\big|_{(1,1)} + b = \boxed{-2 + b = g'_y(1,1)}$

$z = g(1,1) + g'_{x(1,1)}(x-1) + g'_y(1,1)(y-1) =$

$= \frac{3}{2} - 3a + b + (5 - 3a)(x-1) + (-2+b)(y-1) =$

$= \frac{3}{2} - 3a + b + (5-3a)x - (5-3a) + (b-2)y - (b-2)$

$z = (5-3a)x + (b-2)y + \left(\frac{3}{2} \cancel{-3a} \cancel{+b} - 5 \cancel{+3a} \cancel{-b} + 2\right)$

s/enunciado $\to 20x - 10y + 2z = D \to \underbrace{10x - 5y + z = \frac{D}{2}}$

$z = (5-3a)x + (b-2)y - \frac{3}{2}$ $\qquad \boxed{z = \frac{D}{2} - 10x + 5y}$

Por igualdad de polinomios, queda que: $\begin{cases} 5 - 3a = -10 \quad \text{I} \\ b - 2 = 5 \quad \text{II} \\ -3/2 = D/2 \to \boxed{D = -3} \end{cases}$

I) $5 + 10 = 3a \to \boxed{a = 5}$

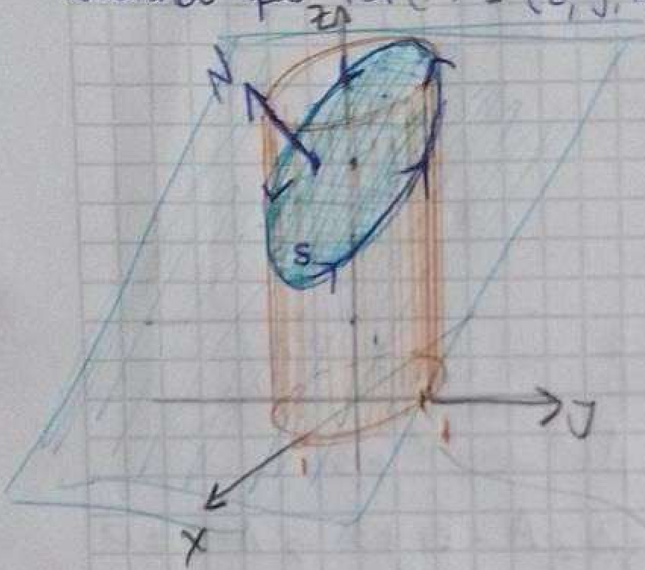
II) $\boxed{b = 7}$

AM II	Final	3/3
	UTN BA	10-12-24

(P3) Calcular el valor del trabajo de $\bar{F} \in C^1$ a lo largo de la curva C de ecuaciones:

$$x+z=3 \quad \wedge \quad x^2+y^2=1$$

sabiendo que $rot(\bar{F}) = (z, y, x)$. Indicar el sentido elegido.



C es una curva cerrada y suave borde de S

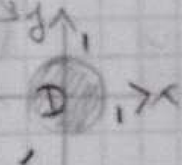
S sup. orientable

$\bar{F} \in C^1$ (por enunciado)

Se cumplen las hip. T. Stokes ∴

$$\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{c} = \iint_S rot(\bar{F})\, \breve{n}\, ds =$$

$S: \underbrace{x+z=3}, \; x^2+y^2 \leq 1$



$$= \iint_D rot(\bar{F})\, n\, dx\,dy =$$

$G(x,y,z) = x+z-3$

$N_S \parallel \nabla G(x,y,z)$

$$= \iint_D (z, y, x)\,(1,0,1)\, dx\,dy =$$

$z = 3-x$

$$= \iint_D \overbrace{3-\cancel{x}}^{z} + \cancel{x}\; dx\,dy =$$

$$\left.\begin{array}{l} G'_x = 1 \\ G'_y = 0 \\ G'_z = 1 \end{array}\right\} N_S = (1,0,1)$$

$$= 3 \boxed{\iint_D dx\,dy} \quad \text{Área}_D = \pi$$

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{c} = 3\pi}$$

(P4) Plantear el área de la porción de sup. $z = y^3$ siendo $4-x^2 \geq y \wedge y \geq y_P$ en el 1º octante, hallando previamente y_P, sol. part. de $y'' - y = -3x$

$y(0)=0 \wedge y'(0)=3$

Hallo y_P

SH) $y'' - y = 0$

$r^2 - 1 = 0 \rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -1 \rightarrow \boxed{y_H = Ae^x + Be^{-x}}$ $A, B \in \mathbb{R}$

SP) $y = Cx + D \rightarrow y' = C \rightarrow y'' = 0$

$y'' - y = -3x$

$0 - (Cx + D) = -3x$

$\underbrace{-Cx}_{-3}\ \underbrace{-D}_{0} = -3x \longrightarrow \begin{matrix} C = 3 \\ D = 0 \end{matrix} \rightarrow \boxed{y_{part} = 3x}$

$y_G = Ae^x + Be^{-x} + 3x \longrightarrow y' = Ae^x - Be^{-x} + 3$

$\hookrightarrow y(0) = 0 = A + B$

$y'(0) = \cancel{3} = A - B + \cancel{3} \rightarrow A - B = 0$

$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=0 \end{cases} \rightarrow A = B = 0 \rightarrow \boxed{y_P = 3x}$

Sup: $S: z = y^3$

$G(x,y,z) = y^3 - z$

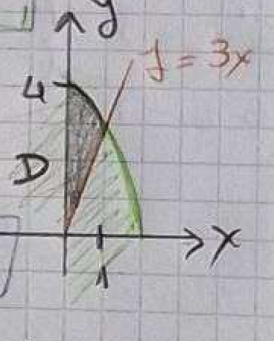
$N_S = (0, 3y^2, -1)$

$\| N_S \| = \sqrt{9y^4 + 1}$

restricciones: $4 - x^2 \geq y$

$y \geq 3x$

$\boxed{3x \leq y \leq 4 - x^2}$



$\boxed{0 \leq x \leq 1}$

$\begin{cases} y = 3x \\ y = 4 - x^2 \end{cases}$

$3x = 4 - x^2$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$x = 1$

$A_S = \iint_S dS = \iint_D \| N_S \| \, dx\,dy$

$$\boxed{A_S = \int_0^1 \int_{3x}^{4-x^2} \sqrt{9y^4+1}\, dy\, dx}$$